C21 Determine if the matrix A below is diagonalizable. If the matrix is diagonalizable, then find a diagonal matrix D that is similar to A, and provide the invertible matrix S that perfoms the similarity transformation. You should use your calculator to find the eigenvalues of the matrix, but try only using the row-reducing function of your calculator to assist with finding eigenvectors.

C21 Determine si la matriz A es diagonalizable. Si la matriz es diagonalizable, entonces encuentre una matriz diagonal D que sea similar a A, y proporcional a la matriz S invertible que hace la similitud de la transformación. Usted debe usar su calculadora para encontrar los valores propios de la matriz, pero intente solamente de usar la funcion de la reduccion por filas de su calculadora para encontrar los vectores propios.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 24 \\ -3 & -27 & -29 & -68 \\ 1 & 11 & 13 & 26 \\ 1 & 7 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

Desarrollo

A calculator will provide the eigenvalues $\lambda = 2, 2, 1, 0$, so we can reconstruct the characteristic polynomial as:

La calculadora nos proporcionara los siguientes valores propios $\lambda = 2, 2, 1, 0$,de modo que podemos reconstruir el polinomio característico como:

$$P_A(x) = (x-2)^2(x-1)x$$

So the algebraic multiplicities of the eigenvalues are:

Entonces las multiplicidades algebraicas de los valores propios son:

$$\alpha_1(2) = 2 \qquad \alpha_1(1) = 1 \qquad \alpha_1(0) = 1$$

Now compute eigenspaces by hand, obtaining null spaces for each of the three eigenvalues by constructing the correct singular matrix (Theorem EMNS [1213]),

Ahora calcularemos los valores del espacio a mano, Ahora obtenemos cada uno de los espacios nulos para cada uno de los tres valores propios mediante la construcción de la matriz singular correcta,

$$A-2I_4=\begin{pmatrix} -1 & 9 & 9 & 24 \\ -3 & -29 & -29 & -68 \\ 1 & 11 & 11 & 26 \\ 1 & 7 & 7 & 16 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_A(2) = \mathcal{N}(C - (0)I_4) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$A-1I_4=\begin{pmatrix} 0 & 9 & 9 & 24 \\ -3 & -29 & -29 & -68 \\ 1 & 11 & 12 & 26 \\ 1 & 7 & 7 & 17 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_A(0) = \mathcal{N}(C - (0)I_4 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{13}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$A - 0I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 9 & 24 \\ -3 & -27 & -29 & -68 \\ 1 & 11 & 13 & 26 \\ 1 & 7 & 7 & 18 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_A(0) = \mathcal{N}(A - (0)I_4 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

From this we can compute the dimensions of the eigenspaces to obtain the geometric multiplicities

Desde este punto podemos calcular las dimensiones de los espacios propios para obtener la multiplicidad geometrica

$$\alpha_1(2) = 2 \qquad \alpha_1(1) = 1 \qquad \alpha_1(0) = 1$$

For each eigenvalue, the algebraic and geometric multiplicities are equal and so by Theorem DMFE [1316] we now know that A is diagonalizable. The construction in Theorem DC [1309] suggests we form a matrix whose columns are eigenvectors of A

Por cada valor propio , la multiplicidad algebraica y geometrica es la misma y por el Teorema DMFE [1316] sabemos que A es diagonalizable.La construcción en el Teorema DC [1309] sugiere que forma una matriz cuyas columnas son los vectores propios de A

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 3 \\ -5 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Since $det\ (S) = -1 \neq 0$, we know that S is nonsingular (Theorem SMZD [1169]), so the columns of S are a set of 4 linearly independent eigenvectors of A. By the proof of Theorem SMZD [1169] we know

Sabemos que det $(S) = -1 \neq 0$, Sabemos que S es no singular (Theorem SMZD [1169]),de modo que las columnas de S es un conjunto de 4 vectores propios linealmente independientes de A. Por la prueba del Teorema SMZD [1169] Sabemos que,

$$S^{-1}\text{AS} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a diagonal matrix with the eigenvalues of A along the diagonal, in the same order as the associated eigenvectors appear as columns of S.

Es una matriz diagonal con los valores propios de A a lo largo de la diagonal principal, en el mismo orden de los vectores propios asociados que aparecen en las columnas de S.

Contribuido por Robert Beezer

Traducido por Federico Rodriguez B